

## 5–6 КЛАССЫ

1. В результате наблюдения из космоса за зоной сейсмической активности на Землю поступали сигналы в виде вспышек красного, желтого и зеленого цветов в следующей последовательности:  
5 красных вспышек, затем 3 желтых, затем 2 зеленых;  
затем снова 5 красных, затем 2 зеленых, затем 3 желтых;  
затем 3 желтых, 5 красных, 2 зеленых;  
3 желтых, 2 зеленых, 5 красных;  
2 зеленых, 5 красных, 3 желтых;  
2 зеленых, 3 желтых, 5 красных;  
потом последовательность повторяется. Всего получено 2026 сигналов (каждая вспышка — один сигнал). Сигнал какого цвета был последним?

**Решение.** Заметим, что сигналы идут сериями по 10 вспышек, после каждого шести серий повтор. Разделим 2026 на 60 с остатком, получим в остатке 46. Значит, последним был шестой сигнал из пятой серии, т. е. красный.

**Ответ:** красного.

2. 30 студентов с пяти курсов сочинили для школьной олимпиады 40 задач (с каждого из курсов участвовал хотя бы один студент, каждый студент сочинил хотя бы одну задачу). Студенты с одного курса сочиняли одинаковое число задач, студенты с разных курсов — разное. Сколько студентов сочинили по одной задаче?

**Решение.** Возьмем по одному студенту с каждого из пяти курсов. Они сочинили  $\geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$  задач. Тогда оставшиеся 25 студентов сочинили  $\leq 40 - 15 = 25$ , т. е. каждый из них сочинил по одной задаче. Учтем еще одного студента из начальной группы с разных курсов.

**Ответ:** 26.

3. Последовательность чисел  $a_0, a_1, a_2, \dots$  задается по правилу:  $a_0$  и  $a_1$  — произвольные натуральные числа,  $a_2 = a_0^2 + a_1^2$ ,  $a_3 = a_1^2 + a_2^2$ , и так далее — каждое следующее число равно сумме квадратов двух предыдущих. Что можно сказать о четности числа  $a_1 + a_{2026}$  (всегда четное, всегда нечетное, зависит от выбора чисел  $a_0$  и  $a_1$ )?

**Решение.** Заметим, что четность при возведении в квадрат сохраняется. Рассмотрим четыре варианта начальных условий (для краткости пишем только остатки от деления на 2, т. е. четные числа обозначаем 0, нечетные 1). Правила сложения:  $0 + 0 = 0$ ,  $0 + 1 = 1$ ,  $1 + 0 = 1$ ,  $1 + 1 = 0$ . Первый вариант  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 0$ . Тогда все  $a_n = 0$ , значит,  $a_1 + a_{2026} = 0$ , т. е. четное. Если  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ , то  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = 0$ ,  $a_4 = 1$ ,  $a_5 = 1$ , получаем последовательность 011011011.... Поскольку 2026 при делении на 3 дает остаток 1, то  $a_{2026} = 1$ , значит,  $a_1 + a_{2026} = 1 + 1 = 0$ , т. е. четное. Если  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ , то  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = 1$ ,  $a_4 = 0$ ,  $a_5 = 1$ , получаем последовательность 101101101..., тогда  $a_{2026} = 0$ , значит,  $a_1 + a_{2026} = 0 + 0 = 0$ , т. е. четное. Наконец, если  $a_0 = a_1 = 1$ , то последовательность 110110110..., тогда  $a_{2026} = 1$ ,  $a_1 + a_{2026} = 0$ , т. е. четное.

**Ответ:** всегда четное.

4. Дан квадрат  $ABCD$ . Провели прямую  $KM$  так, что точка  $K$  лежит на стороне  $AB$ , точка  $M$  лежит на стороне  $CD$ . Каждую из точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  отразили симметрично относительно прямой  $KM$ . Получили, соответственно, точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ . Сделайте иллюстрацию. Найдите угол  $A'C'B'$ .

**Решение.** Обозначим основания перпендикуляров, опущенных из точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  на прямую  $KM$  через  $A_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$  соответственно. По определению симметрии  $AA_0 = A'A_0$ ,  $BB_0 = B'B_0$ ,  $CC_0 = C'C_0$ . Тогда фигуры  $A_0A'BB_0$  и  $A_0AB'B_0$  (равнобедренные трапеции) совпадают при наложении, т. е. равны. Значит,  $A'B = AB'$ . Если фигуру (равнобедренную трапецию)  $AA'BB'$  сложить по оси симметрии (прямой  $A_0B_0$ ), то точка  $A$  совпадет с точкой  $A'$ , а точка  $B$  — с точкой  $B'$ . Отсюда  $A'B' = AB$ . Аналогично  $A'C' = AC$ ,  $B'C' = BC$ , значит, треугольники  $A'B'C'$  и  $ABC$  равны. Следовательно, угол  $A'C'B'$  равен углу  $ACB$  и равен  $45^\circ$ .

**Ответ:**  $45^\circ$ .

5. Алгоритм шифрования сообщений на первом этапе предполагает установление взаимно однозначного соответствия между множествами  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  и  $B = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ , где все элементы множества  $B$  — некоторые натуральные числа. На втором этапе составляется равенство, в левой части которого находится комбинация элементов множеств  $A$  и  $B$ , знаки арифметических операций и скобки, а в правой — натуральное число. Дешифрующее устройство приписывает данному сообщению статус «шум», если равенство не является верным ни при каком варианте соответствия между множествами  $A$  и  $B$ , и статус «сигнал», если существует такое взаимно однозначное соответствие между множествами  $A$  и  $B$ , при котором равенство становится верным. Какой статус будет присвоен сообщению

$$(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 2) \cdot (x_3 - 3) \cdot (x_4 - 4) \cdot (x_5 - 5) \cdot (x_6 - 6) = 75?$$

Поясните свой ответ.

**Ответ:** Сигнал, так как, например,  $(6 - 1)(3 - 2)(4 - 3)(5 - 4)(2 - 5)(1 - 6) = 75$ .

6. Два одинаковых аккумулятора  $A_1$  и  $A_2$ , стоящие на космической станции, работают с равномерной одинаковой нагрузкой. На каждом из аккумуляторов есть индикатор заряда, который показывает уровень заряда в процентах от полного. Показание каждого из индикаторов — целое число, полученное путем округления реального значения по правилам математического округления. В 10:40 по московскому времени индикаторы на обоих аккумуляторах показывали 15%. Через час индикатор аккумулятора  $A_1$  показывал 11%, а индикатор аккумулятора  $A_2$  — 12%. Может ли случиться так, что аккумулятор  $A_2$  разрядится до нуля быстрее, чем аккумулятор  $A_1$ , при условии, что нагрузка остается одинаковой и равномерной? Если нет, то поясните, почему. Если да, то приведите пример и укажите какой-нибудь момент времени, к которому аккумулятор  $A_2$  полностью разрядится, а  $A_1$  — еще нет.

**Ответ:** Да, например, в 10:40  $A_1$  показывал 14,6, а  $A_2$  — 15,4. Тогда через час будет  $A_1 = 11,4$ ,  $A_2 = 11,6$ . Полностью  $A_1$  разрядится через  $4\frac{9}{16}$  часа,  $A_2$  — через  $4\frac{1}{19}$  часа.